

# ポンプとそれを含む流体系の非定常問題

大橋 秀雄\*

## 1. まえがき

この小文で扱うポンプを、遠心ポンプや軸流ポンプなどのターボ形ポンプに限定しよう。このようなポンプは、普通一定回転速度、一定流量の定常な運転状態で使用され、揚程・軸動力・効率などの流体性能を表わす特性値も、軸スラスト・ケーシング応力などの強度的特性値も、何れも一定な値を保つ。ポンプは、本来このような定常な運転状態に対して設計されており、その場合に、良い流体効率を得られるのみならず、軸受その他の機械要素部分の信頼性も高く、また、騒音・振動などによるトラブルも起こりにくく配慮されている。

しかし一方、ポンプがどうしても非定常な運転条件\*\*で使用されざるを得ない場合もある。このような場合を分類すると、つぎのようになる。

### 1) 使用条件そのものが非定常な場合

管路の抵抗、ポンプの回転速度などが、使用条件から、かなり早い速度で変動し、これに伴って、ポンプの作動点も変動する場合である。典型的な例として、火力発電所でコンデンサに冷却用海水を供給する循環水ポンプがある。海面に生ずる波によつて吸込水位が波の周期に応じて上下に変動し、管路の抵抗曲線が変化してポンプの作動点も周期的に変動する。

作動点が増加する例は、ほかにも沢山ある。しかし、その変動速度がゆるやかな場合は、これをあえて非定常問題とみなす必要はない。

### 2) 始動・停止などにおいて、過渡的に非定常となる場合

ポンプが始動や停止を行なうときは、回転速度が0→規定回転速度の間を急速に変化し、これに伴って流量も急激に変動する。このような状態における流体性能、軸スラスト、各部応力などの過渡値を予知することは、始動・停止時のトラブルを予防する上に重要である。

液体ロケットの推進液送ポンプなどでは、0.5秒程度で、停止から全速まで急加速される極端な場合もある。

### 3) ポンプを含む流体系で自励振動が発生し、ポンプの作動点が増加する場合

\* 東京大学工学部機械工学科

\*\* 動翼・静翼の相互干渉による局所的な非定常さ、旋回失速による非定常さなどは、ポンプ内部の一部に限定されて起こり、ポンプの吸込口や吐出し口まではその影響が波及しない。したがって、このような内部的・局所的な非定常流があつても、ここでいう非定常な運転条件には含まない。

ポンプの揚程曲線が低流量域で右上り特性をもつとき、この領域でポンプを使用すると、サージングが発生することがある。またポンプ自体は右下りの安定領域で使用されても、ポンプを含む系全体の特性によつては、これが自励振動に入ることがある。この例として、液体燃料ロケットの流体-構造物系の縦モード自励振動（普通POGOと呼ばれている）があり、これによつて打上げに失敗した例がいくつかあつた。流体系がこのような自励振動に入るときは、ポンプの作動点も周期的に変動する。

以下、このような非定常運転条件を対象として、その問題点を考えてみよう。

## 2. 準定常な取扱いと動的な取扱い

ポンプやポンプ系の作動状態が増加していても、その変動が増加するならば、これを定常な作動状態の連続とみなすことができる。このような取扱いを、準定常(quasi-steady)と呼ぶ。

まずポンプ系全体の取扱いを、すでに述べたボイラ循環水ポンプの場合を例にとつて考えよう。図1に示すボ

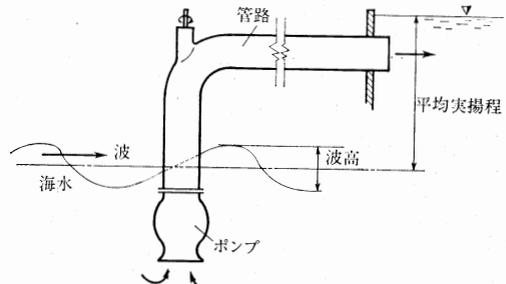


図1 吸込水位が増加するポンプ系

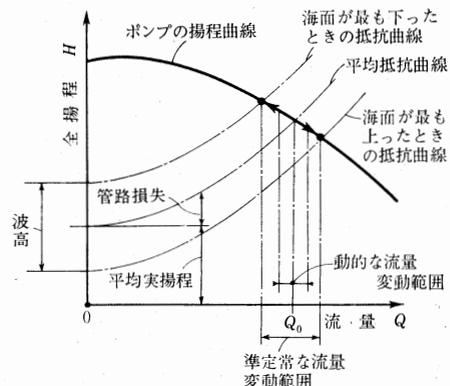


図2 吸込水位が増加するときの作動点

ンプ系において、波の周期 $T$ が極めて長いときは、これを準定常として取扱うことができ、各瞬間の作動点は図2に示すように、その瞬間の抵抗曲線とポンプの揚程曲線との交点として定まる。

このように、波高に対応して、準定常な流量変動範囲が定まる。しかし、波の周期 $T$ が短くなり流量変動に伴う管路内の水柱の慣性力が大きくなるにつれて、このような準定常な取扱いとは不可能となる。いま、流量 $Q$ が

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_0 + \Delta Q \cos \omega t \\ \omega &= 2\pi/T \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

で表わされる変動をすると、管路内の平均流速  $u=Q/A$  ( $A$ : 平均断面積) の変化による慣性圧力勾配  $dp_i/dx$  は、運動方程式から

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\rho}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\rho}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\rho \omega \Delta Q \sin \omega t}{gA}$$

したがって、管路の全長を  $l$  とすると、ポンプ系の水柱に  $\Delta Q$  の流量変動を起こさせる最大圧力差は

$$\left| \frac{dp_i}{dx} \right|_{\max} \times l = \frac{\rho \omega \Delta Q l}{gA}$$

となる。これをヘッドで表わし、 $H_i$  とすると

$$H_i = \frac{\omega \Delta Q l}{gA} = \frac{2\pi \Delta Q l}{gAT} \quad (2)$$

波の周期 $T$ が十分長く、慣性ヘッド  $H_i$  が、ポンプの全揚程 $H$ に比し十分小さい場合に限り、準定常な取扱いが妥当である。

周期 $T$ が短くなるにつれて、水柱の慣性が無視できなくなり、図2に示すように、動的な流量変動範囲は小さくなる。また、海面の上下運動と流量変動との位相関係も、慣性の影響が入るに従って遅れが始め、動的な場合は、準定常な場合より最大  $90^\circ$  まで遅れる。

動的な場合にポンプ系の状態変化を計算するには、流量や圧力変化の関係を記述する方程式(群)を導き、これを与えられた境界条件に合せて解くことが必要である。

ポンプ系の動的な計算を行なう場合に、流体の圧縮性や管路の弾性を考慮すべきか否かが問題となる。いま、管路の液体中を圧力波が伝ばする速度(音速)を  $a$  とするとき、周波数  $f=1/T$  の変動の波長  $\lambda$  は、 $\lambda=a/f$  となる。管路の全長  $l$  が波長の  $1/8$  以下のときは、管路内における波動的状態変化は無視できるほど小さく、圧縮性を考慮に入れえる必要はない。したがって問題となっている非定常現象の周波数が  $f$  の場合、管路の全長  $l$  が

$$l < \frac{a}{8f} \quad (3)$$

のときは、管路を非圧縮性とみなしてよい。

以上のように、ポンプを含む流体系全体の動的挙動を考えると、準定常な取扱いは、きわめてゆるやかな変動がきわめて短い管路に限定される。

つぎに、ポンプ自体の動的な性能について考えよう。

いま、図3に示すように、ポンプの流量が平均値  $Q_0$  のまわりを振幅  $\Delta Q$  で変動するとき、各瞬間にポンプが発揮する全揚程  $H$  (ポンプ作用による全圧の増加)/ $r$  は如何に変化するであろうか、流量変動の周期 $T$ が長いときは、各瞬間の  $H$  と  $Q$  は、定常な性能試験の結果から得られる揚程曲線に沿って変化

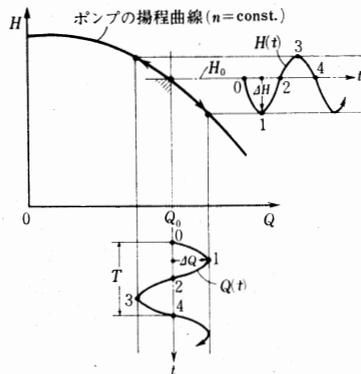


図3 準定常なポンプ性能の変化

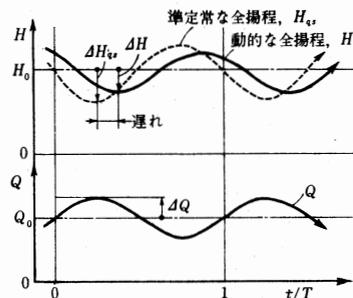


図4 ポンプの準定常な性能と動的な性能

し、ポンプの全揚程  $H(t)$  は、図3に示すように変化する。全揚程の振幅  $\Delta H$  と流量振幅  $\Delta Q$  は、揚程曲線の勾配  $dH/dQ$  から定まり、揚程曲線を直線で近似できる小振幅の変動では、

$$\frac{\Delta H}{\Delta Q} = -\frac{dH}{dQ} \quad (4)$$

となる。なお、 $Q$  と  $H$  の変動の位相は、右下り特性部では  $180^\circ$  のズレがある。これが準定常な性能変化である。いつぼう、周期 $T$ が短くなるにつれて、図4に示すように、実際の全揚程変化と準定常な変化とが次第に離れ始め、動的な性能を準定常な性能で近似することが不適當となる。

非定常な運転条件で使用されるポンプ自体の性能を考えると、準定常な取扱いが可能な変動周波数の上限——臨界周波数  $f_{cr}$ ——を知ることがまず必要となる。臨界周波数は、流量 $Q$ がステップ的に変化するときの、全揚程の過渡応答の時定数  $\tau$  とも対応しており、

$$\tau \approx 1/2\pi f_{cr} \quad (5)$$

の関係にある。

臨界周波数以上のす早い変動条件におけるポンプの動的な性能(動特性)を知るには、振幅比  $\Delta H/\Delta H_{qs}$  やその位相関係を周波数の関数として知る必要があり、これ

は、ポンプ全揚程の流量に対する周波数応答を求めることに対応している。

ポンプの場合、5章で詳しく述べるように、臨界周波数  $f_{cr}$  は普通かなり高く、回転速度  $n$  の  $1/10$  のオーダーである。したがって、ポンプが非定常な条件で運転される場合でも、その変動周波数は、ほとんどの場合ポンプ自体の臨界周波数より低い。このような場合、流体系の計算には水柱の慣性を考慮に入れた動的な取扱いをすることが必要であつても、ポンプ自体が発揮する性能は、準定常として取扱うことができる。

ポンプの動特性を考慮しなければならぬようなす早い変動が起こるときは、式(3)で述べた非圧縮性の前提条件が成立しないことが多い。この場合は、管路の流体系の計算に音波の伝は遅れを考慮する波動的取扱いをしなければならない。

非定常さが、周期的変動でなく過渡的な変化の場合も、変動時間が式(5)で表わされるポンプの時定数より十分長ければ、管路の流体系の過渡計算に、ポンプの準定常な性能を用いることができる。

### 3. ポンプを含む流体系の動特性 — POGO を例にとつて —

ポンプを含む複雑な流体系の動特性を解析する方法を、図5に示す液体燃料ロケットの場合を例にとつて述べよう<sup>1,2)</sup>。すでに述べたように、この種のロケットでは、エンジンに燃料を供給する流体系と、それを保持する構造物系が連成して激しい縦モードの自励振動に入り、流体系の圧力変動が過大になつて打上げ途中でエンジンが停止する事故が何度か起こつた。したがつて最近では、事前に流体-構造物系の動特性を十分検討し、自励振動発生のおそれが予知されるときは、管路のパラメータを変えとか、適当な吸振装置を取付けるとかの対策が講ぜられている。

図5からわかるように、タンクに貯蔵されている燃料と酸化剤が、それぞれのタービン駆動遠心ポンプで加圧され、エンジン燃焼室に吹き込まれる。いま、何等かの外乱によつてエンジンスラスト  $T$  が増加すると、その不平衡力によつてロケットの上向き加速度が増加すると

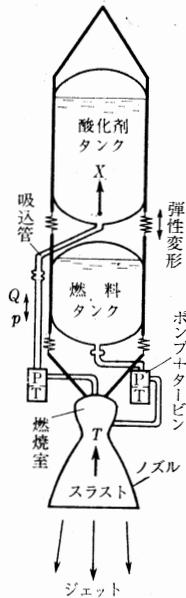


図5 液体燃料ロケットの流体-構造物系

もに、外かく、タンクなどの構造物に弾性変形が生ずる。

上向き加速度の増加は、ポンプの有効押し込み高さを増し、ポンプの吸込圧が高まつて流量が増加する。また、構造物が縦方向に圧縮されて吸込管の有効長さが減少すると、これも流量を増加させる方向に作用する。このように、スラストの変化は燃焼流量に影響を与え、燃焼流量は逆にスラストを決定する。この流体-構造物系の個々の特性は互に関連し合い、図6のブロック線図に示すように、一つの閉ループを形成している。

このような系の動特性や安定性を解析するには、いろいろな方法が考えられる。最も一般的には、系の代表点における圧力 ( $p_1, p_2, \dots$ )、流量 ( $Q_1, Q_2, \dots$ )、変位 ( $X_1, X_2, \dots$ )などを未知数に選び、これらの未知数間の関係を規定する微分方程式を未知数の数だけ設定し、これらの連立方程式を解いて、各未知数を与えられた初期値から、時間の経過と共に如何に変化してゆくか追跡すればよい。これらの解は、電算機によつて数値的に求められる。大型計算機を使用するときには、未知数の数も100以上に設定でき、問題はむしろ、如何に適切な方程式群を設定するかにかかっている。

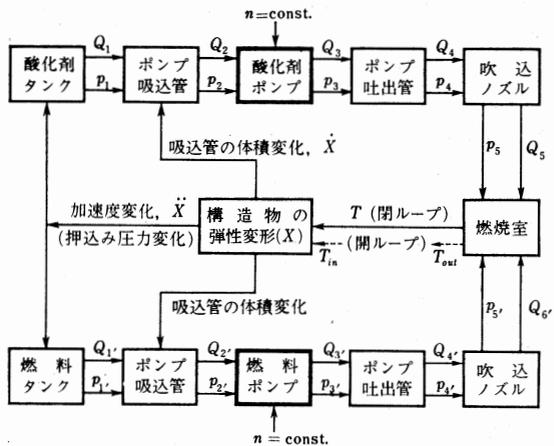


図6 流体-構造物系のブロック線図

このようにして得られた数値解が、ある一定周期で変動を繰返すならば、その系は不安定で自励振動が発生することが予測される。

流量や圧力などが正弦的に振動する場合、流体系の各ブロックの応答を伝達関数のマトリックスで表現する方法もしばしば用いられる。この方法は、線形な範囲、すなわち小振幅の変動に限られるが、一ブロックの特性が一つの伝達マトリックスで表現され、ブロックをいろいろに組合せたときの全体の伝達マトリックスが、各マトリックスの積として容易に求められる利点がある<sup>3,4)</sup>。

一例として、管路から成るブロックを考えよう。図7

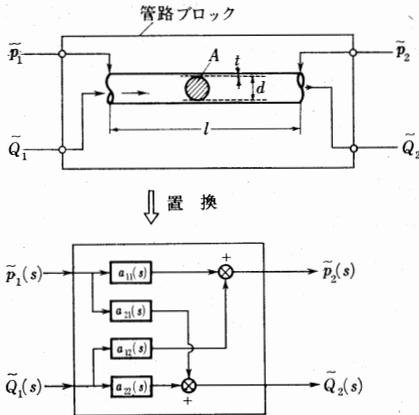


図7 管路の伝達マトリックス

に示すように、管路の入口における圧力と流量の平均値からの偏差を  $\tilde{p}_1 = p_1 - \bar{p}_1$ ,  $\tilde{Q}_1 = Q_1 - \bar{Q}_1$  で表わし、出口側の値を  $\tilde{p}_2$ ,  $\tilde{Q}_2$  とする。これは、丁度4端子の電気回路に相当し、 $\tilde{p}_1$  と  $\tilde{Q}_1$  が入力電圧と入力電流、 $\tilde{p}_2$  と  $\tilde{Q}_2$  が出力電圧と出力電流に対応する。

このような回路では、出力  $\tilde{p}_2$ ,  $\tilde{Q}_2$  は、入力  $\tilde{p}_1$  と  $\tilde{Q}_1$  の関数として定まる。いま、 $\tilde{p}_1$ ,  $\tilde{Q}_1$ , ……のラプラス変換を  $\tilde{p}_1(s)$ ,  $\tilde{Q}_1(s)$  で表わすと、管路ブロックの作用は、それぞれの影響の及ぼし合いを規定する4つの伝達関数によって図7のように結びつけられ、これをつぎのように表わすことができる。

$$\begin{cases} \tilde{p}_2(s) = a_{11}(s)\tilde{p}_1(s) + a_{12}(s)\tilde{Q}_1(s) \\ \tilde{Q}_2(s) = a_{21}(s)\tilde{p}_1(s) + a_{22}(s)\tilde{Q}_1(s) \end{cases} \quad (6)$$

以上の関係をマトリックスを用いて表わすと、

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_2(s) \\ \tilde{Q}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_1(s) \\ \tilde{Q}_1(s) \end{bmatrix} \quad (7)$$

となり、 $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  の4つの伝達関数から成るマトリックスが、伝達マトリックス (transmission matrix) と呼ばれるものである。なお、伝達マトリックスの  $s$  の代りに  $j\omega$  を代入して得られる複素数が、その角速度  $\omega = 2\pi f$  に対する周波数伝達関数を示し、正弦的に変動する2つの量の振幅と位相の相関を規定する。

以下、二三の伝達マトリックスを紹介しよう。

a) 管路

気泡を含まない一様断面の管路の伝達マトリックスは、液体の圧縮性を考慮した管路の波動方程式から求められ、つぎのように定められる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_2 \\ \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -Z \sinh \gamma l \\ -\frac{1}{Z} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{Q}_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここに、 $\gamma l = \sqrt{(Ls+R)Cs}$

$$Z = \sqrt{(Ls+R)/Cs}$$

$$L = \rho l/A, R = 2\Delta p_l/Q \quad (\Delta p_l: \text{摩擦圧力損失})$$

$$C = lA/\rho a^2 \quad (a: \text{管路中の音速})$$

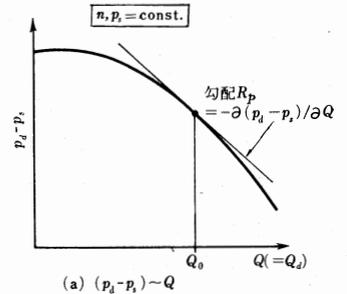
管路の全長  $l$  が、式(3)に示すように、問題となる最小波長の1/8以下のときは、上式はつぎのように近似される。

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_2 \\ \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}(Ls+R)Cs & -(Ls+R) \\ -Cs \left[ 1 + \frac{1}{4}(Ls+R)Cs \right] & 1 + \frac{1}{2}(Ls+R)Cs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{Q}_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

b) オリフィス

管路中にオリフィスが挿入されているとき、その短い区間における慣性効果と絞りによる圧力損失効果のみを考え、オリフィス前後の状態を結合する伝達マトリックスは、つぎのようになる。

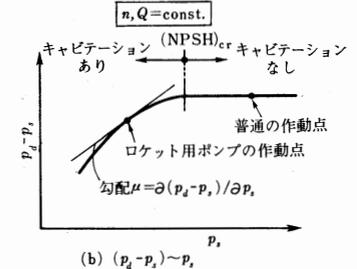
$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_2 \\ \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(Ls+R) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{Q}_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$



(a)  $(p_d - p_s) \sim Q$

c) ポンプ

一定回転速度  $n$  で運転されるポンプの圧力上昇  $p_d - p_s$  は、普通流量  $Q$  によって定まり、図8(a)に示すように、流量変動が小さい範囲では



(b)  $(p_d - p_s) \sim p_s$

図8 ポンプの特性

$$\tilde{p}_d - \tilde{p}_s = -R_p \tilde{Q}_d$$

で表わすことができる。ここに、 $d$  および  $s$  は、吐出し側および吸込側における値を示す。

普通のポンプでは、図8(b)に示すように、キャピテーションが発生しないよう十分な NPSH のもとで運転され、吸込圧  $p_s$  が変動しても、ポンプの圧力上昇には影響しない。しかし、ロケット用ポンプのように、キャピテーションを起こしつつ運転されるものでは、吸込圧が低下するとキャピテーション領域が広がって圧力上昇はさらに減少し、その間の関係は

$$\tilde{p}_d - \tilde{p}_s = \mu \tilde{p}_s$$

で表わされる。この際、吸込部における空洞体積の増減につれて、ポンプの吸込流量  $Q_s$  と吐出し流量  $Q_d$  の間にズレを生じ、その関係は空洞の体積係数  $C_P$  を用いて

$$\tilde{Q}_d = \tilde{Q}_s - C_P \frac{d\tilde{p}_s}{dt}$$

で表わされる。以上の関係を総合し、さらにポンプ内の液体の慣性力を、等価な管路のインダクタンス  $L = \rho l/A$  として考慮に入れると、ポンプの伝達マトリックスは結局つぎのように表わされる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_d \\ \tilde{Q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \mu + R_P C_P & -(R_P - Ls) \\ -C_P s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_s \\ \tilde{Q}_s \end{bmatrix} \quad (11)$$

以上の例のように、流体系の各要素の伝達マトリックスをつぎつぎにきめてゆくと、結局図6に示す系全体の結合関係が確定する。このような系の安定性を判定するには、たとえばエンジンラスト部で閉ループを切断し、 $T_{in}$  から  $T_{out}$  に至る一巡伝達関数について、NYQUIST の安定判別法を適用すればよい。

このような方法は、原理的には正しいものであつても、その実行には膨大な計算を必要とし、不安定振動の有無やその周波数を見出すのは容易でない。また、マトリックス法は元来線形振動に対するものであるから、振動が起こる場合の極限振幅などを求めることは不可能である。

自励振動が発生する可能性の有無を比較的簡単に予測するために、流体系と構造物系を分離し、それぞれの個有振動数を求めてその一致を検討する方法もある。

図9は、サターンV型ロケットの1段目の酸化剤(液体酸素)供給系について、タンクからポンプ吸込口までの流体系の伝達関数を求め、その周波数応答から流体系

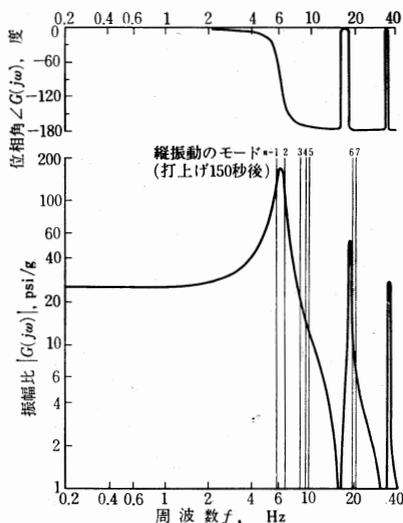


図9 吸込管路の周波数応答 (Saturn SIC, Lox)

の個有振動数を推定した例である。プロットされている周波数伝達関数  $G$  は、吸込側の管路が、タンク部を節、エンジン部を腹として弾性振動をするとき、ポンプの振動加速度  $\ddot{X}_P$  ( $X_P$ : ポンプの縦方向変位) に対するポンプ吸込圧の変化  $\tilde{p}_s$  の相関を示している。この結果から、ポンプの振動によつて吸込圧の変動が大きく増幅される吸込管の個有振動数が、6, 18, 35Hz 付近にあることがわかる。いつぼう、構造物系の弾性計算から、図示するような振動数の位置に、いろいろなモードの縦振動の個有振動数がくる。したがつてこの結果から、6Hz の付近で流体系と構造物系の共振による自励振動が発生する可能性があることがわかる。しかしこのような簡便法によつては、それが実際に自励振動に成長するか否かの理論的予測はできない。

液体ロケットの場合、燃焼が進むにつれて燃料タンクの重量が減少し、構造物系の個有振動数が段々高まつてくる。したがつて、燃焼過程をいくつかの段階に分け、どの段階で共振の危険性が最も高いか推定しなければならない。

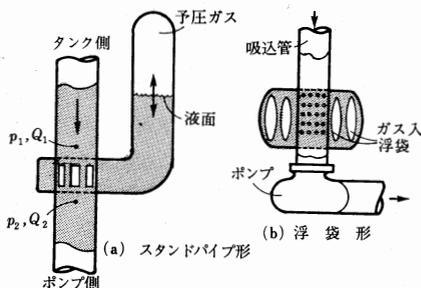


図10 アキュムレータ

計画した管路の動特性を解析した結果、共振の可能性を避けるために、管路の個有振動数を変化させたい場合が生ずる。このような場合、管路全体のパラメータを変化させるより、図10(a), (b)に示すように、管路の途中にアキュムレータを設置する方法が有効である。この場合、アキュムレータ前後の状態の伝達マトリックスは、つぎようになる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_2 \\ \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{Q}_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここに、

$$Y_A(s) = C_A s \sqrt{1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_A}\right) + \left(\frac{s}{\omega_A}\right)^2}$$

$C_A$ : アキュムレータの容量

$\zeta$ : アキュムレータのダンピングファクタ

$\omega_A$ : アキュムレータの自由振動の角速度

以上、ポンプを含む流体系の動特性や安定性を解析する方法について述べた。これらの解析法は、電気回路、

制御理論, 振動学, 音響学, 油圧管路, 空気管路などと共通の基盤に立ち, 何れか一つに明るい人は, それを容易にポンプ系の解析に応用できよう。

4. 単独翼と翼列の動特性

ターボ形ポンプでは, 流体と軸動力とのエネルギー交換は, 流体が回転羽根車の翼列を通過する間に行なわれる。したがって, このようなポンプの動特性を明らかにするには, 翼列, あるいはそれを構成する単独翼の動特性を知る必要がある。

翼列は互に干渉する単独翼の集合であるから, まず単独翼の非定常流に対する応答を考えてみよう。

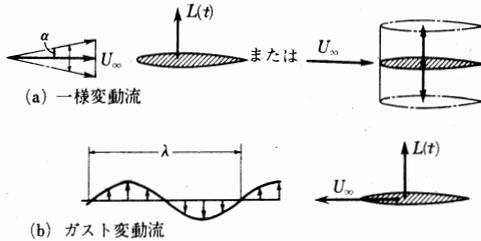


図 11 翼に対する非定常条件

ポンプの流量が正弦的に変動するとき, ポンプ中の翼に対する非定常な流入条件を調べてみると, 基本的には, 図 11 に示すような2つの場合に分れる。(a)の一樣変動流は, 翼前方の流れが一体となつて上下に振動し, 翼に対する迎え角が正弦的に変化する場合である。これはまた, 一樣流中で, 翼が上下に平行移動する場合と本質的に同一な現象となる。(b)のガスト変動流は, 上下方向に正弦的なガスト (gust, 突風) が分布する中を, 翼が速度  $U_\infty$  で突き抜けて飛ぶ場合に相当する。このようないろいろな条件に対する単独翼の非定常ポテンシャル解は, 1930 年代に KÁRMÁN や SEARS らによつて解かれており, 広く知られている。

図 12 (a)は, 一樣変動流の中に平板翼が置かれているとき, 動的な揚力  $L(t)$  と, 各瞬間瞬間における迎え角  $\alpha(t)$  から準定常で求められる揚力  $L_0(t) = \pi \rho l U_\infty^2 \alpha(t)$  との相関を, 変動の無次元周波数  $\omega l / 2U_\infty = \pi f l / U_\infty$  の関数として, ベクトル軌跡で示したものである<sup>6)</sup>。周波数の増加につれて, 動的揚力の変動振幅は一旦小さくなり, 位相も遅れるが, 周波数がさらに高くなると, 周波数に比例し,  $90^\circ$  の進みをもつ付加質量に原因する揚力 (apparent mass lift) が卓越し始め, 揚力振幅は再び増加する。

図 12 (b)は, ガスト変動中に平板翼が置かれるときの動的な揚力変動の相関を示す<sup>6)</sup>。周波数  $f$  は,  $f = U_\infty / \lambda$  で求まり, これから無次元周波数  $\omega l / 2U_\infty = \pi l / \lambda$  が計算される。基準となる揚力  $L_0(t)$  として, 翼の中央にお

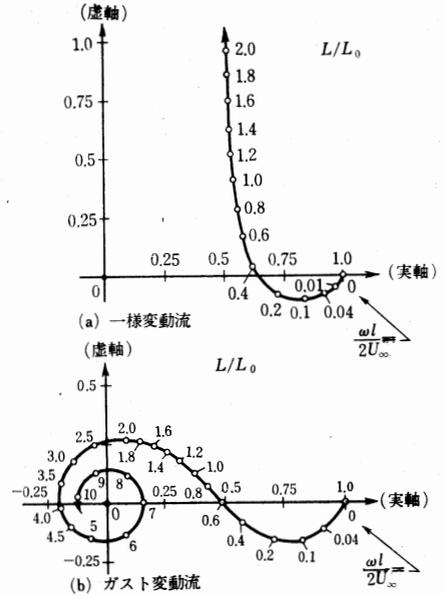


図 12 平板翼に働く揚力の周波数応答のベクトル軌跡

るガストの値 (吹き上げ或は吹き下し) が, 翼全面に亘つて作用すると考えるときの準定常揚力がとられている。この場合は, 無次元周波数の増加につれて, 翼には沢山のガストが含まれるようになり, 吹き上げ領域と吹き下し領域の作用が打消し合つて, 動的な揚力振幅は次第に減少する。

すでに述べたように, 変動周波数の増加につれて, 付加質量に原因する揚力は, 周波数に比例して増加する。しかし, この揚力は, 翼と流体との相対運動に対して  $90^\circ$  の位相差をもち, 翼と流体とのエネルギー授受には全く関与しない。エネルギー授受に関与するのは, 翼と流体の相対運動と同相にある揚力であるから, 変動周波数が高まるにつれて, 1 サイクル当たりのエネルギー移動量は減少する。ポンプの流量が変動する場合, 周波数が高まるにつれて, 対応する全揚程の変化が段々小さくなるであろうことは, 上述の単独翼の特性からも想像できる。

以上単独翼の周波数応答について述べたが, 過渡応答についても簡単に触れよう。図 13 (a) に示すように, 一樣流中に平行におかれていた平板翼が  $t=0$  の瞬間に迎え角  $\alpha$  となつたときの循環と揚力のステップ応答の計算値が, 図 13 (b) に示されている<sup>7)</sup>。揚力  $L$  は, 付加質量効果によつて直ちに定常揚力  $L_0$  の  $1/2$  となるが, 循環は 0 から始つて段々と増加する。

循環にこのような遅れが生ずる理由は, 翼後縁から吐き出される自由渦が, 翼前方に下向きの誘導速度を生じ, 有効迎え角を減らして循環の急激な増加を抑制する

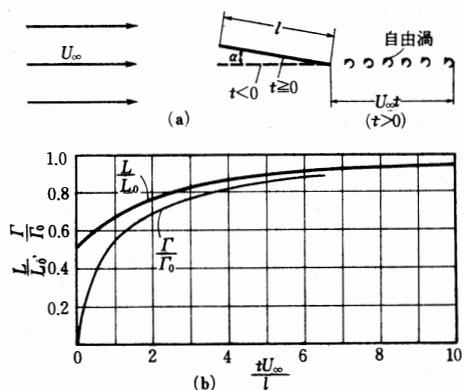


図 13 平板翼の循環と揚力のステップ応答

からである。

循環のステップ応答の時定数  $\tau$  は、ほぼ  $\tau = 2l/U_\infty$  であり、主流が翼弦長の 2 倍の距離を通過する時間に相当する。ポテンシャル流れの仮定のもとに生ずるこのようなポテンシャル遅れは、翼の後縁から流出する自由渦が、翼との干渉が無視できる距離にまで遠ざかるのに一定の時間を要することに原因している。実際には、以上のポテンシャル遅れのほか、翼面上の境界層の生成速度と関係する粘性遅れがあるが、これを理論的に推定することは極めて難しい。

上述のような応答を求めるには、単独翼のまわりの非定常流を解かねばならない。循環が変動すると、ヘルムホルツの渦保存法則にしたがつて、必ずそれと逆符号の循環が後流中に吐き出される。従来の理論解析では、計算を容易にするため、自由渦は後縁から主流の方向に引いた直線上に分布するものと仮定した。このような仮定は、変動振幅が小さい線形な範囲では妥当であろうと考えられているが、実際の渦面は、図 14 の写真で示すようになり異なる。渦面は、次第に巻き込んで大きな渦に成長してゆく性質をもっている。したがって、たとえ変



無次元周波数  $\omega l/2 U_\infty \approx 5$   
 片振幅 翼弦長の 4%  
 位置 下死点  
 レイノルズ数  $U_\infty l/\nu \approx 10^4$

図 14 上下振動をする翼のうしろの渦面の巻き込み (撮影、石川宣勝)

動振幅が小さくとも、写真のように、翼の後縁から離れると直ちに大きな渦に巻き込み、あたかもカルマン渦のような配列を保つてうしろへ流されてゆく。このような実際に近い渦モデルを仮定した理論解は、未だ知られていない。

翼の非定常性能を実験的に確認することも、仲々困難である。非定常実験の宿命として、実験結果の精度や信頼性が意図するほど十分に得られず、実験の試みも少ない。

単独翼の延長として、翼列の非定常性能を求めることができる。翼列方向に変動の位相が変化하는場合は、翼列フラッタの研究と関連して、主として特異点解法によって数値的に求められている<sup>8,9)</sup>。ポンプの非定常性能を求めるうえには、翼列方向に変動の位相が同一であるから、翼列配置が単純な場合は、等角写像法によって解析的に非定常解を求めることができる<sup>10)</sup>。

### 5. ポンプの動特性

一定回転速度  $n$  で運転されているポンプに周波数  $f$  の流量変動がある場合、ポンプの圧力上昇作用が如何に応答するかを知るため、遠心ポンプを用いて実験が行なわれた<sup>11)</sup>。図 15 はその結果を示している。横軸には、羽根車の翼列 (動翼) の無次元周波数  $\omega_R = (\cos \lambda_R / N_R \phi)$  ( $f/n$ ) ( $\lambda_R$ : 動翼の食違い角,  $N_R$ : 動翼枚数,  $\phi$ : 流量係数) がとられ、これに対し、動的な圧力上昇の準定常な圧力上昇に対する相関が示されている。ここに圧力上昇とは、ポンプの吐出し口、吸込口で測定される圧力の差 ( $p_a - p_s$ ) から、ポンプ内に充満する液体の慣性による圧力差を差引いた、ポンプ羽根車の正味の昇圧能力を意味するものとする。なお、実験結果と対照するため

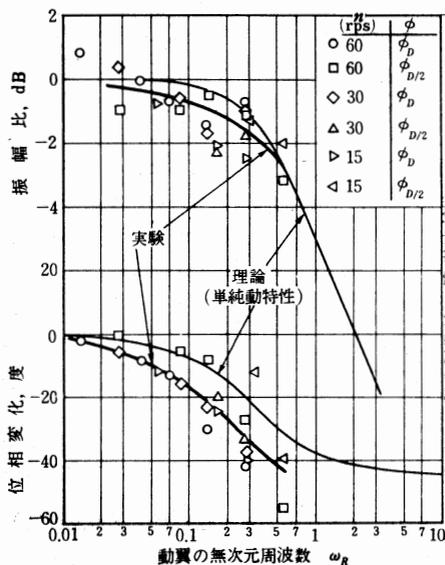


図 15 遠心ポンプの圧力上昇の周波数応答

に、非定常翼列の特性から理論的に導かれた応答も示されている<sup>12)</sup>。非定常実験に特有な実験点のばらつきがあるものの、実験と理論の傾向はほぼ一致している。この結果から、ポンプの動的な性能が準定常なものから離れ始める臨界点は、 $\omega_R \approx 0.1$  の付近にあることが判る。したがって、臨界周波数  $f_{cr}$  は、つぎの実験式からきめられる。

$$f_{cr} = 0.1 (N_R \phi / \cos \lambda_R) n \quad (13)$$

標準的な遠心ポンプとして、 $N_R = 8$ 、 $\phi = 0.1$ 、 $\lambda_R = 25^\circ$  をとると、

$$f_{cr} \approx 0.1 n$$

となり、 $f_{cr}$  は、オーダ的、回転速度の 1/10 となる。臨界周波数以上での圧力上昇の応答は、単純化された理論によると近似的に  $1/\sqrt{1+Ts}$  で表わされる。しかし実験的に得られた応答は、ポテンシャル遅れのみを考慮した理論解より大きな遅れをもち、むしろ、一次遅れ  $1/(1+Ts)$  に近い変化をする。したがって、動特性を考慮に入れたポンプの伝達マトリックスは、式 (11) 中の  $R_P$  の代りに、 $R_P/(1+Ts)$ 、 $T = 5 \cos \lambda_R / \pi N_R \phi n$  を入れたものとなる。

以上の応答は、ポンプにキャピテーションが発生しない状態におけるものである。非定常運転時には、吸込圧力の激しい変動に伴って周期的なキャピテーションが起こりやすいが、このような条件下では、流量変動と圧力変動の線形関係が著しくそこなわれ、非線形振動に特有な複雑な現象が現われる<sup>13)</sup>。たとえば、流量変動の周波数が  $f$  であっても、吸込圧や吐出し圧の変動周波数は、 $f/2$ 、 $f/3$ 、……などの分数調波のうち、空洞を含む管路系の固有振動数に最も近い一つが支配的となる。

ポンプを停止から急速始動するときの過渡性能については、未だほとんど知られていない。この場合、回転速度と流量が同時に急変するため、これに対するポンプの昇圧作用の追従性を予測することは極めて困難である。

図 16 には、実験的に求められた始動過渡性能の一つが示されている<sup>14)</sup>。口径 40 mm の小形遠心ポンプを、

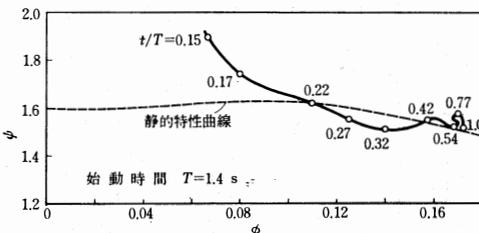


図 16 始動時における遠心ポンプの過渡特性

1.4 秒で停止から 3000 rpm に急加速し、回転速度、流量、圧力上昇の時間的変化が測定された。なお吐出しバルブの開度は、定常状態でポンプが定格点で作動するように調節されている。実験結果から、各瞬間瞬間の流量係数  $\phi$  と揚程係数  $\psi$  が計算され、その軌跡が、図 16 の実線で示されている。破線は、このポンプの静的な特性曲線である。もし実線と破線が一致すれば、ポンプ始動時の過渡性能は、準定常な性能と一致し、動的な考慮は必要ない。しかし図 16 からわかるように、誘導電動機の直入始動による程度の加速でも、過渡性能と静的な性能との差はつきり現われる。このような性能差が起こる機構については、未だ解明されていない。

ポンプを始動するとき、管路系を流れる流量が時間と共に単調に増加せず、途中で流量増加が止つたり、場合によっては流量が一時減少したりすることもある。このような現象は、管路中の液体が、静止の状態から段々増速されてゆく途中で層流から乱流に遷移し、管摩擦抵抗を急増させる現象とも関係があるように思われ、羽根車内の過渡的な流れと併せて、興味ある問題である。

## 6. むすび

今後、ポンプを含む流体系が増々複雑化するにつれて、予期しない自励振動が発生したり、制御系が不安定となつたりする可能性も増えてくる。

このような場合、ポンプやそれを含む流体系の動特性を知ることがまず必要となるので、その問題点につき、筆者の知る範囲内で述べてみた。筆者は、ポンプ自体の動特性の解明に興味をもっているが、ポンプの動特性が直接問題となるような高周波の非定常現象は、実際には仲々現われない。そのような現象を経験された方は、是非御教示下さるようお願い致します。

## 文 献

- 1) R.H. FASHBAUGH & V.L. STREETER: Trans. ASME, Ser. D, 87-4 (1965-12), 1011.
- 2) Aerojet-General Report, AMDR 9635-037 (1967-3).
- 3) S. RUBIN: Trans. ASME, Ser. B, 86-1 (1964-2), 9.
- 4) L.A. PIPES: Matrix Methods for Engineering, Prentice-Hall, New Jersey, 1963.
- 5) TH. VON KARMAN & W.R. SEARS: J. Aero. Sci., 5-10 (1938-8), 379.
- 6) W.R. SEARS: J. Aero. Sci., 8-3 (1941-1), 104.
- 7) H. WAGNER: ZAMM, 5-1 (1925-2), 17.
- 8) 花村・田中: 機械学会論文集, 33-247 (昭 42-3), 377.
- 9) 谷田・岡崎: 機械学会論文集, 34-259 (昭 43-3), 463.
- 10~12) 大橋: 機械学会論文集, 33-255 (昭 42-11), 1769, 1789 および 1779.
- 13) L.E. SACK & H.B. NOTTAGE: Trans. ASME, Ser. D, 87-4 (1965-12), 917.
- 14) 醍醐・大橋: 機械学会第 792 回講演論文集, (昭 44-9), 123.